Cours et **exercices d'applications et de réflexions** ***sur les nombres complexes (Partie 2)***

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

NOMBRES COMPLEXES(Partie 2)

I) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL.

1) Notation et conséquence :

Définition : Soit θ un réel

on pose : $cos\theta + i\ sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(cos\theta + i\ sin\theta) = re^{i\theta}$

Cette écriture s'appelle la forme exponentielle du complexe non nul z

Exemple : $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$|z|=2$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Conséquence de la notation :

Tous les résultats qu'on a vus au paravent concernant les modules et les arguments des nombres complexes non nuls

On peut les rapporter en utilisant la notation exponentielle.

Propriété : Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

1) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ 2) $z^n = r^n e^{in\theta}$

3) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$ 4) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

5) $\overline{z} = re^{-i\theta}$ 6) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

Exemples : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i$ 2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Solution :1) $z_1 = 2+2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ $|z_2| = \sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1 \times z_2$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

4) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

5) $$(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$$

2) Formule de Moivre

Propriété : Pour tout réel θ on a :

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = (r)^n re^{in\theta}$$

d'où : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

Applications : en utilisant la Formule de Moivre

1)montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

2)montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Solutions :1)d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Et on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

Donc : $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Donc : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

2) d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2 i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$

Donc :

$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

Donc : $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

Et : $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1 - \cos^2\theta\right)$

Donc :

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

3)montrons que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$?

3) d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4(\cos\theta)^3 i\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta$

$-4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$

Donc : $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

Et $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Donc :

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\left(1 - \cos^2\theta\right) + \left(1 - \cos^2\theta\right)^2$

Finalement en a donc :

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

3) Formule d'Euler :Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul et son conjugué $\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ en faisant la somme membre à membre on obtient : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ puis en faisant la différence membre à membre on obtient : $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Propriété : Pour tout réel θ on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple1: Linéariser : $\cos^4 x$

On a :

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 + b^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
triangle de Pascal

Donc : $\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \left(e^{4i\theta} + 3e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 6 + 3e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+3\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}(2\cos 4\theta+3\times 2\cos 2\theta+6)$$

Car $e^{ni\theta}+e^{-ni\theta}=2\cos n\theta$

Donc : $\cos^4\theta==\frac{1}{8}(\cos 4\theta+3\cos 2\theta+3)$

Donc : $\cos^4\theta==\frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{3}{8}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$

Exemple2:

1)Montrer que $(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2)on pose : $u=3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v=3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2=1-e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Solution :1) à vérifier

2)a) $u+v=3e^{i\frac{\pi}{5}}+3e^{i\frac{\pi}{7}}=3\left(e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{7}}\right)$

$$u+v=3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)}\right)$$

$$u+v=3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)}\right)$$

$u+v=6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right)e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}$ et puisque

$6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right)>0$ alors : $|u+v|=6\cos\left(\frac{\pi}{35}\right)$

Et $\arg(u+v)\equiv\frac{6\pi}{35}[2\pi]$

b) $u_1=1+e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}+\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$$u_1=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}+e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta}+e^{-ni\theta}=2\cos n\theta$

alors : $u_1=\sqrt{3}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $|u_1|=\sqrt{3}$

Et $\arg(u_1)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

c) $u_2=1-e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}-\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$$u_2=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}-e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)=-2i\sin\frac{\pi}{6}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}=2i\,\mathrm{sins}\, n\theta$

alors : $u_2=-i\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $|u_2|=1$

Et $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Et $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice1 :1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\theta\in\mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$

3) Montrer que : $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$ $\theta\in\mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5\theta$ b) $\cos^2\theta\sin^3\theta$

Solution :1)On a : $\cos^2 x=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2\right)=\frac{1}{4}(2\cos 2\theta+2)=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$$

2) $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$?

$$\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3}+3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3}+e^{-i3\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ donc :

$$=\frac{1}{8}(2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

3) $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$?

On a : $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Donc :

$$\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3-3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3}-3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3}-e^{-i3\theta}\right)-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

Et on a : $2i\sin n\theta=e^{in\theta}-e^{-in\theta}$ donc :

$$=-\frac{1}{8i}(2i\sin 3\theta-3\times 2i\sin\theta)=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

4) $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$?

On a : $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et $\theta\in\mathbb{R}$

$$\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4-4\left(e^{i\theta}\right)^3\cdot e^{-i\theta}+6\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-4\left(e^{i\theta}\right)^1\left(e^{-i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^4\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}\cdot e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}\cdot e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}\cdot e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6+\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ donc :

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}(-4\times 2\cos 2\theta+6+2\cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}(-4\cos 2\theta+3+\cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

5)a)On a :

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-106a^2b^3+5ab^4-b^5$$

Donc : $\sin^5\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^5\left(e^{5i\theta}-5e^{4i\theta}e^{-i\theta}+10e^{3i\theta}e^{-2i\theta}-10e^{2i\theta}e^{-3i\theta}+5e^{i\theta}e^{-4i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}-10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-5\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)+10\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{16}(\sin 5\theta-5\sin 3\theta+10\sin\theta)$$

Car $e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}=2i\sin n\theta$

Donc : $\sin^5 x==-\frac{1}{16}\sin 5\theta+\frac{5}{16}\sin 3\theta-\frac{5}{8}\sin\theta$

5)b) $\cos^2\theta\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\times\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{4i\theta}-2+e^{-4i\theta}\right)\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)-2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}(2i\sin 5\theta-2i\sin 3\theta-2\times 2i\sin\theta)$$

$$=-\frac{1}{16}(\sin 5\theta-\sin 3\theta-2\sin\theta)$$

II) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:

Considérons l'équation $P(z)=az^2+bz+c\quad E)$

Où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$

On a :

$$P(z)=a\left(z^2+\frac{b}{a}z\right)+c=a\left(z^2+2\frac{b}{2a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c$$

$P(z)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

On pose : $\Delta=b^2-4ac$

1) Si Δ = 0 l'équation (E) admet racine double : $z=-\frac{b}{2a}$

2) Si Δ ≠ 0 ; soit δ l'un des deux racines carrées de Δ, on aura : $P(z)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right)$

$P(z)=a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)$

$P(z)=a\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)$

On pose : $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$ on a :

$P(z)=a(z-z_1)(z-z_2)$

$P(z)=0\Leftrightarrow(z-z_1)(z-z_2)=0$

$\Leftrightarrow z=z_1$ ou $z=z_2$

Propriété : Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2+bz+c=$ (E) où a, b et c sont des réels avec a ≠ 0et soit $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant

on a :

Si Δ = 0 alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z=-\frac{b}{2a}$

Si Δ ≠ 0 l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, $b$et c sont des réels et Δ < 0 alors l'équation $az^2+bz+c=$ admet deux racines complexes conjugué $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

et $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(E):z^2-z+2=0$

2) $(E):z^2-z-2=0$

3) $(E):z^2-2z+1=0$

Solution :1) $(E):z^2-z+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)=-7=\left(i\sqrt{7}\right)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Et $z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) $(E):z^2-z-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(-2)=9=(3)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{1-3}{2}=-1$ e

$z_2=\frac{1+3}{2}=2$

Donc : $S=\{-1;2\}$

3) $(E):z^2-2z+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4=0$

L'équation (E) admet comme solution le complexe $z=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$ donc : $S=\{1\}$

Propriété : Si l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2 alors $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$et $z_1\times z_2=\frac{c}{a}$

Exemple: soit $z\in\mathbb{C}$ on pose : $P(z)=z^2-2z+2$

1)calculer : $P(1-i)$

2)en déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équations $P(z)=0$

Solution :1)

$P(1-i)=(1-i)^2-2(1-i)+2=-2i-2+2i+2=0$

Donc $z_1 = 1-i$ est une racine de de l'équations $P(z)=0$ et on a : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ donc :

$1-i+z_2 = -\frac{-2}{1}$ donc $z_2 = 2+i-1 = 1+i$

Par suite : $S=\{1-i;1+i\}$

Exercice2 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$

2) $z^2-6z+13=0$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos 2\theta)z+i\sin\theta=0$ avec : $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ ssi $z^2-4=0$ ou $z^2+9=0$

Ssi $z^2=4$ ou $z^2=-9$

Ssi $z=\sqrt{4}$ ou $z=-\sqrt{4}$ ou $z=\sqrt{9}i$ ou $z=-\sqrt{9}i$

Ssi : $z=2$ ou $z=-2$ ou $z=3i$ ou $z=-3i$

Donc : $S=\{-3i;3i;-2;2\}$

2) $z^2-6z+13=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(13)=36-52=(4i)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$

Et $z_2=\overline{z_1}=3-2i$ donc : $S=\{3-2i;3+2i\}$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos 2\theta)z+i\sin\theta=0$

$\Delta=(2(\cos 2\theta))^2-4(4\cos\theta)(\sin\theta)i$

$\Delta=4\cos^2 2\theta-16i\cos\theta\sin\theta$

$\Delta=4(\cos^2 2\theta-4i\cos\theta\sin\theta)$

On a : $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$ et $\cos^2 2\theta=1-\sin^2 2\theta$

Donc : $\Delta=4(1^2+i^2\times\sin^2 2\theta-2i\sin 2\theta)$

Donc : $\Delta=(2(1-i\sin 2\theta))^2$

les solutions sont : $z_1=\frac{2(\cos 2\theta)+2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

et : $z_2=\frac{2(\cos 2\theta)-2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

les solutions sont : $z_1=\frac{\cos 2\theta+1-i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et : $z_2=\frac{\cos 2\theta-1+i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et on a : $\cos 2\theta-1=-2\sin^2\theta$ et $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$

donc : $z_1=\frac{2\cos^2\theta-i2\sin\theta\cos\theta}{4\cos\theta}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{2}$

et $z_2=\frac{-\sin^2\theta+i\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$

Exercice3 :1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$

2) Soit $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^3+(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}^2+(17-8\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}+17\boldsymbol{i}$

a) Montrer que l'équation $P(z)$ = 0 admet un imaginaire pur unique comme solution.

b)déterminer les réels $\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}$ tels que :

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{c})$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=0$

Solution :1) $\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(17)=64-68=(2i)^2$

les solutions sont : $z_1=\frac{8+2i}{2}=4+i$ et $z_2=\overline{z_1}=4-i$

donc : $S=\{4-i;4+i\}$

2)a)soit $\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{bi}$ une solution imaginaire pur de l'équation $P(z)$ = 0 donc :

$\boldsymbol{z}_0^3+(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}_0^2+(17-8\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}_0+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $(\boldsymbol{bi})^3+(-8+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{bi})^2+(17-8\boldsymbol{i})(\boldsymbol{bi})+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $-\boldsymbol{ib}^3-(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{b}^2+17\boldsymbol{bi}+8\boldsymbol{b}+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $-\boldsymbol{ib}^3+8\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{ib}^2+17\boldsymbol{bi}+8\boldsymbol{b}+17\boldsymbol{i}=0$

Donc : $8b^2+8b+i\left(-b^3-b^2+17b+17\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2+8b=0 \\ -b^3-b^2+17b+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b(b+1)=0 \\ -b^3-b^2+17b+17=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \text{ ou } b=-1 \\ -b^3-b^2+17b+17=0 \end{cases}$

$b=0$ ne vérifies pas $-b^3-b^2+17b+17=0$

Car $-0^3-0^2+170+17\neq 0$

$b=-1$ vérifies $-b^3-b^2+17b+17=0$ car :

$-(-1)^3-(-1)^2+17(-1)+17=0$

Donc : $b=-1$ donc : $z_0=(-1)i=-i$ est l'unique solution imaginaire pur de l'équation $P(z)=0$

2)b) $(z+i)\left(az^2+bz+c\right)=az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ci$

$P(z)=az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

Et on a : $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$

Donc : $\begin{cases} a=1 \\ b+ai=-8+i \\ c+bi=17-8i \\ ci=17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c-8i=17-8i \\ c=17 \end{cases}$

donc : $a=1$ et $b=-8$ et $c=17$

Donc : $P(z)=(z+i)\left(z^2-8z+17\right)$

2)c) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+i)\left(z^2-8z+17\right)=0$

$\Leftrightarrow z^2-8z+17=0$ ou $z+i=0$

$\Leftrightarrow z_1=4+i$ ou $z_2=4-i$ ou $z_0=-i$

Donc : $S=\{4-i;4+i;-i\}$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2Z^2-2Z+5=0$ 2) $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

Solutions :1) $2Z^2-2Z+5=0$ $\quad \Delta=-36$

Donc : $z_1=\dfrac{2-i\sqrt{36}}{4}$; $z_2=\dfrac{2+i\sqrt{36}}{4}$

Donc : $\boxed{S=\left\{\dfrac{1-3i}{2}\ ;\ \dfrac{1+3i}{2}\right\}}$

2) $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

On remarque que 2 est solution

donc : $3Z^3-3Z^2+2Z-2$ est divisible par : $z-1$

La division euclidienne de $3Z^3-3Z^2+2Z-2$ par :

$z-1$ nous donne : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=(Z-1)\left(3Z^2+2\right)$

$3Z^2+2=0 \Leftrightarrow Z^2=-\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Donc les solutions de : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

sont : $Z=1$ ou $Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $Z=-i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Donc : $\boxed{S=\left\{1;i\sqrt{\dfrac{2}{3}};-i\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}}$

Exercice5 : soit : $z=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1)Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2)en déduire : $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

Solution :1) $z=e^{-i\pi}\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}=e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$z=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=-\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{4}=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$

$\boxed{z=\dfrac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}+i\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}}$

2) $\sin\dfrac{-11\pi}{12}=\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$ et $\cos\dfrac{-11\pi}{12}=-\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$

Donc : $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$ et $\boxed{\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}}$

III)LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation :

1.1 Définition géométrique.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$; on appelle translation la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

1.2 Ecriture complexe d'une translation.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que : $aff(\vec{u})=a$

et $t_{\vec{u}}$ la translation de $\vec{u}$. La translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'})=aff(\vec{u})$

$\Leftrightarrow aff(M')-aff(M)=aff(\vec{u})$

$\Leftrightarrow z'-z=a\Leftrightarrow z'=z+a$

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :

$aff(\vec{u})=a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ si et seulement si : $z'=z+a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $\boldsymbol{aff(\vec{u})=a}$

Exemple: Dans le plan complexe $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points : A ;B ;C d'affixe respectivement $z_A=3+5i$; $z_B=3-5i$; $z_C=7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u})=4-2i$

1)montrer que : $z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2) verifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Solution:1) $T(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

$\Leftrightarrow z_{M'}-z_M=z_{\vec{u}}\Leftrightarrow z_{M'}=z_M+z_{\vec{u}}\Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{u}}$

$\Leftrightarrow z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ **)**

2)on a : $z_A=3+5i$

Donc : $z'=3+5i+4-2i$

Donc : $z'=7+3i=z_C$

Donc: le point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3)on a : $z_B=3-5i$ Donc : $z'=3-5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z'=7-7i=z_{B'}$

Donc l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$ est $z_{B'}=7-7i$

2) L'homothétie

2.1 Définition géométrique.

Définition : Soient $\Omega(\omega)$ un point dans le plan et k un réel non nul ; on appelle l'homothétie de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et de rapport $\boldsymbol{k}$,la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'}=k.\overrightarrow{\Omega M}$ et se note $h(\Omega,k)$

- Si $k=1$ alors la transformation $h(\Omega,1)$ est l'identité de $(\mathcal{P})$ et tous les points du plan seront invariants
- Si $k\neq 1$ alors le seul point invariant par $h(\Omega,k)$ est le point Ω le centre de la transformation $h(\Omega,k)$

2.2 Ecriture complexe d'une homothétie.

$\Omega(\omega)$ un point dans le plan complexe et k un réel non nul et different de 1

et $h(\Omega,k)$ l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, qui transforme le point $M(z)$en $M'(z')$

$h(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M'}=k.\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'} - z_\Omega = k\left(z_M - z_\Omega\right) \Leftrightarrow z' - \omega = k\left(z - \omega\right) \Leftrightarrow$

$z' = kz + \omega\left(1-k\right)$ (l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω(ω) et de Rapport k**)**

Propriété: l'homothétie de centre Ω(ω) et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme: $z' = kz + \omega(1-k)$

Exemple: : Dans le plan complexe $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$) et de Rapport $k=4$

1)montrer que : $z' = 4z - 9 + 6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega,k)$**)**

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega,k)$

Solution:1) $h_{(\Omega;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'} = kz_M + z_\Omega(1-k)$

$\Leftrightarrow z' = 4z + z_\Omega(1-4) \Leftrightarrow z' = 4z - 3(3-2i)$

$\Leftrightarrow z' = 4z - 9 + 6i$

2) on a : $z_A = 3+5i$ et $z' = 4z - 9 + 6i$

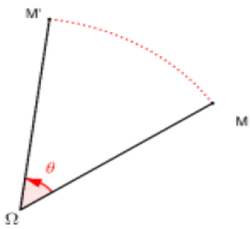
Donc : $z' = 4\left(3+5i\right) - 9 + 6i$

Donc $z_{A'} = 3 + 26i$

3) La rotation :

3.1 Définition géométrique :

Definition: Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, la Rotation de centre **Ω** et d'angle $\boldsymbol{\theta}$ est l'application qui transforme tout point M en M' tel que:



$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

On la note par : R (Ω, θ)

Remarque :

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ alors la rotation d'angle nul est l'identité de $(\mathcal{P})$ et tous les points du plan seront invariants.
- Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ alors le seul point invariant par $R(\Omega,\theta)$ est le point Ω le centre de la rotation (Ω,θ)

3.2 L'écriture complexe d'une rotation.

Soient $\Omega(\omega)$ un point dans le plan complexe et θ un réel non nul. la rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ, transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|z_M - z_\Omega\right| = \left|z_{M'} - z_\Omega\right| \\ \arg\left(\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(z - \omega\right)e^{\theta i} + \omega$$

Propriété : La rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :

$z' = \left(z - \omega\right)e^{\theta i} + \omega$

Exemple: Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points : A ;B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r **)**

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Solution : $r(M)=M' \Leftrightarrow z_{M'}=e^{i\alpha}\left(z_M-z_B\right)+z_B$

$\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-4-8i)+z$

$\Leftrightarrow z'=i(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z'=iz-4i+8+4+8i$

$\Leftrightarrow z'=iz+4i+12$

2)on a : $z_A=7+2i$

Donc : $z'=i(7+2i)+4i+12$

Donc : $z'=7i-2+4i+12=11i+10$ cqfd

Exercice6 :Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω (1+i) et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $r(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\alpha}\left(z-z_\Omega\right)+z_\Omega$

$\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(z-1-i\right)+1+i$

$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left(z-1-i\right)+1+i$

$\Leftrightarrow z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-1-i\right)+1+i$

$\Leftrightarrow z'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right)z+\sqrt{2}+1+i$

Exercice7 : Soit la rotation r de centre **Ω** (i) et transforme O en $O'\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Solution : $r(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\alpha}\left(z-z_\Omega\right)+z_\Omega$

$\Leftrightarrow z'=e^{i\theta}\left(z-i\right)+i$

Et puisque : $r(O)=O'$ alors : $\frac{\sqrt{3}+i}{2}=e^{i\theta}\left(0-i\right)+i$

$\Leftrightarrow e^{i\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{0-i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Donc : $\theta\equiv\frac{-\pi}{3}\left[2\pi\right]$

L'angle de cette rotation est $-\frac{\pi}{3}$

4) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que: $z'=az+b$:

Propriété1 : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$ le point M' (z')tel que $z'=z+b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $aff(\vec{u})=b$

Propriété2 : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$le point M' (z')tel que $z'=az+b$ où a est un complexe tel que $|a|=1$ est la rotation d'angle $\alpha\equiv arg(a)$ [2π] et de centre $\Omega(\omega)$

tel que $\Omega(\omega=\frac{b}{1-a})$

Propriété3 : Soit a un complexe ($a\notin\mathbb{R}$). La transformation plane f qui transforme $M(z)$ en M' (z') tel que : $z'=az+b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f=hoR$ où :

1) R est la rotation d'angle $\alpha\equiv arg(a)$ [2π] et de centre $\Omega(\omega)$ où $\omega=\frac{b}{|a|-a}$

2) h est l'homothétie rapport $r=|a|$ et de centre $O(0)$

Exercice 8: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en M' (z') tel que

$z'=-2z+3-3i$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Solution : Soit : $\omega=\frac{b}{1-a}$ on a :Le point $\Omega(\omega)$ est un point invariant par f: $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{3-3i}{3}=1-i$

D'où: $\begin{cases} z'=-2z+3-3i \\ \omega=-2\omega+3-3i \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z'-\omega=-2\left(z-\omega\right)$ qui se traduit par

$\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ Donc :f est l'homothétie de centre Ω(ω= $1-i$) et de Rapport -2

Exercice 9: Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le point : A (i) et **l**a rotation R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 **l**a rotation de centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Solution :soit un point M (z)

On pose : $R_0(M) = M'(z')$ **et** $R_1(M') = M''(z'')$

$$R_0(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_O) + z_O$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z \text{ Car } z_O = 0$$

Et on a : $R_1(M') = M''(z'') \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z' - z_A) + z_A$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}z - i\right) + i \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Leftrightarrow z'' = iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On sait que la composée de deux rotation est une rotation ($\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi$)

Déterminons le centre de la rotation : $R_1 \circ R_0$ **?**

Le centre de la rotation est le point invariant :

$$\omega = i\omega + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \omega(1-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Donc : $\omega = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

On a **:** $\arg i = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

L'angle de la rotation est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 10: soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit R **l**a rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ **et** $F_2 = T \circ R$

Solution :on considère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$comme repére normé donc : L'angle de la rotation R est : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

donc : R **l**a rotation de centre A (0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$

donc : $R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$

Donc l'écriture complexe de la rotation R est .

$$R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = iz$$

l'écriture complexe de la translation translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$ est: $z'' = z + 1$

soit un point M (z) : on pose : $F_1(M) = M_1(z_1)$ et $F_2(M) = M_2(z_2)$

on a donc : $z_1 = i(z+1)$ et $z_2 = iz + 1$

on a : pour F_1 **:** $z = i(z+1) \Leftrightarrow (1-i)z = i$

$z = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}$ et pour F_1 le seul point invariant est $\Omega_1\left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2}\right)$ et on a :

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}z + \omega_1\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$$

donc F_1 est la rotation de centre $\Omega_1\left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

De même : pour F_2 le seul point invariant est

$\Omega_2\left(\omega_2 = \frac{1+i}{2}\right)$ et on a : $z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i} z + \omega_2\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

donc F_2 est la rotation de centre : $\Omega_2\left(\omega_2 = \frac{1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 11: soit Z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1| \le \left||z|-1\right| + |z||\arg z|$

Solution : soit $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$|z-1| = \left|z-|z|+(|z|-1)\right| \le \left|z-|z|\right| + \left||z|-1\right|$$

On pose : $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$ avec $\mathrm{R} \succ 0$

On a : $\left|z-|z|\right| = \left|\mathrm{R}e^{i\theta} - R\right| = \mathrm{R}\left|e^{i\theta}-1\right|$

$$= \mathrm{R}\left|\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 - e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\right| = \mathrm{R}\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right|$$

Donc : $\left|z-|z|\right| = 2\mathrm{R}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

Or on sait que : $|\sin x| \le |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $\left|z-|z|\right| \le |z||\theta| = |z||\arg z|$

Donc : $|z-1| \le \left||z|-1\right| + |z||\arg z|$

Exercice12 : soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \ne c$ et $b \ne c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}}\right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$

On a si : $|z| = 1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Exercice13 : soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1)Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\mathrm{Im}(S) \succ 0$

3)calculer $S+T$ et $S \times T$

4)en déduire les nombres S et T

Solution : on a : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $z^7 = 1$

1) $\overline{S} = \overline{z} + \overline{z}^2 + \overline{z}^4$

On a si : $|z| = 1$ alors : $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ donc :

$\overline{S} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^4}$ et on a $z^7 = 1$

Donc : $z^6 = \dfrac{1}{z}$ et $z^5 = \dfrac{1}{z^2}$ et $z^3 = \dfrac{1}{z^4}$

Donc : $\overline{S} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^4} = z^3 + z^5 + z^6 = T$

Donc : les nombres S et T sont conjugués

2) Montrons que : $\operatorname{Im}(S) \succ 0$?

On a : $S = z + z^2 + z^4$ et $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

Donc $\operatorname{Im}(S) = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$

$\operatorname{Im}(S) = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{7}\right)$

$\operatorname{Im}(S) = \sin\dfrac{2\pi}{7} - \sin\dfrac{\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7}$ puisque : $\dfrac{\pi}{7} \prec \dfrac{2\pi}{7} \prec \dfrac{\pi}{2}$

Donc : $\sin\dfrac{\pi}{7} \prec \sin\dfrac{2\pi}{7}$ et on a $\sin\dfrac{4\pi}{7} \succ 0$

Donc : $\operatorname{Im}(S) \succ 0$

3)calculons $S+T$ et $S \times T$?

$S + T = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

$S + T = \left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right) - 1$

$S + T = \dfrac{1 - z^7}{1 - z} - 1 = -1$ car $z^7 = 1$

$S \times T = \left(z + z^2 + z^4\right)\left(z^3 + z^5 + z^6\right)$

$S \times T = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$

$S \times T = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}$

On a $z^7 = 1$ donc : $z^8 = z$ et $z^9 = z^2$ et $z^{10} = z^3$

donc : $S \times T = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + 2$

$S \times T = \dfrac{1 - z^7}{1 - z} + 2 = 2$ car : $z^7 = 1$

4)on a $S + T = -1$ et $S \times T = 2$ donc S et T sont

les solutions de l'équation : $x^2 + 1x + 2 = 0$

$\Delta = -7 = \left(\sqrt{7}i\right)^2$

En résolvant l'équation on trouve :

$x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ et $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$ et on a $\operatorname{Im}(S) \succ 0$

Donc : $S = \dfrac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ et $T = \dfrac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien